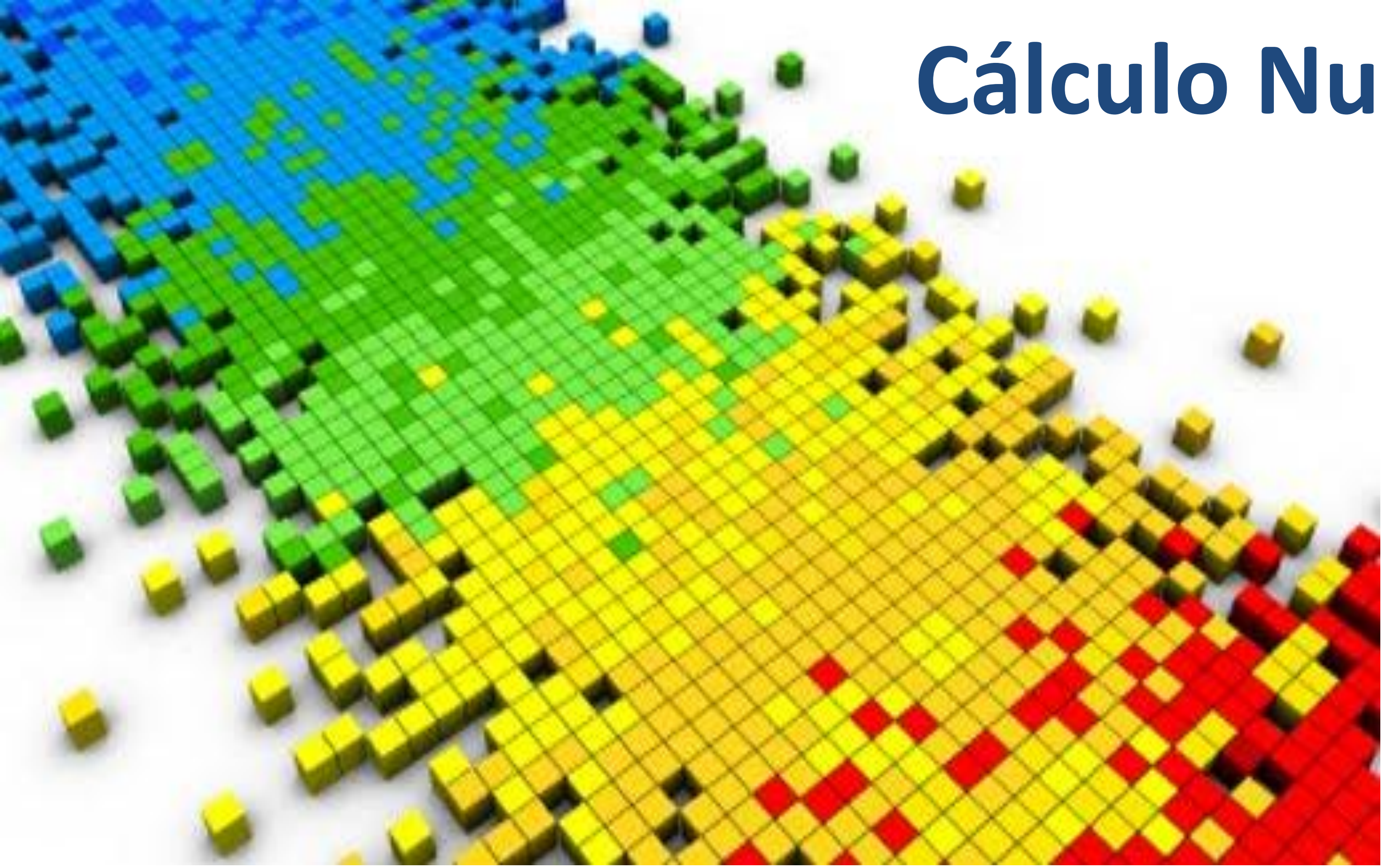


Cálculo Numérico

Aula 8 – Sistemas de Equações Lineares / Parte 1

2014.1 - 29/04/2014

Prof. Guilherme Amorim*

gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

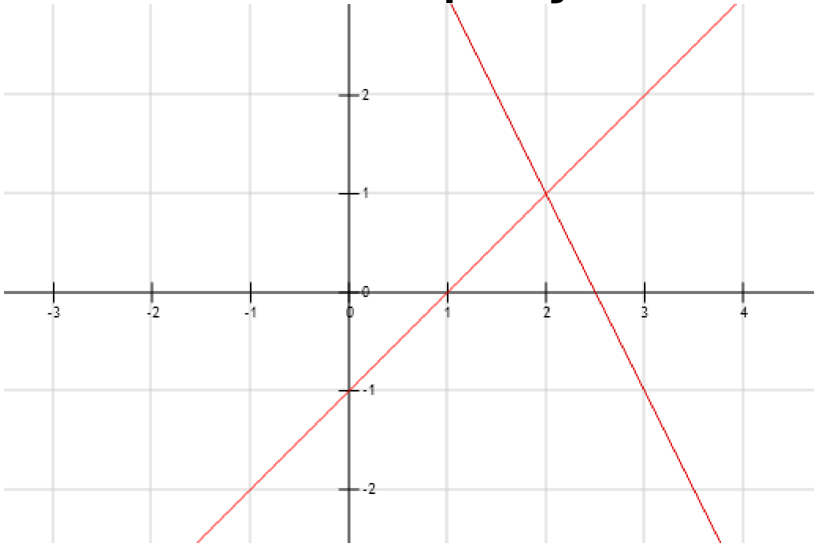
* Com algumas modificações pelo Prof. Sergio Queiroz

Perguntas...

- O que é um sistema de equações lineares?
- Para que serve?

Estamos acostumados com ...

- Sistemas de duas variáveis e duas equações
- Exemplo:
  - $2x + y = 5$
  - $x - y = 1$



- A resolução desse sistema nos dará os valores de x e y que satisfazem às duas equações ao mesmo tempo.
- Nesse caso, podemos resolver por substituição e chegamos à solução $x=2$, $y=1$.

E como resolver sistemas com mais de duas variáveis ?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Será que podemos fazer por substituição?
- Como fazer um computador resolver um sistema de equações lineares?

Dois tipos de métodos:

- Métodos diretos:
  - "São métodos que ao cabo de um número finito de operações apresentam, teoricamente, a solução exata do sistema em estudo."
- Métodos Iterativos:
  - "Os métodos iterativos conduzem a uma solução aproximada, mas com erro controlado, têm vantagens computacionais e implicam menos recursos de memória do que os métodos diretos" [2]

Formas de representação

- Equações:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Matriz: $Ax = b$
  - A: matriz n x n (cada elemento representado por a_{ij})
  - b: vetor de tamanho n (cada elemento b_i)
  - x: vetor de tamanho n (cada elemento x_i)
  - i,j: 1, 2, ..., n
- Somatório:
  - $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,2,\ldots,n.$

E hoje?

- Hoje vamos apresentar alguns métodos diretos para resolução de sistemas de equações lineares:
  - Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Eliminação de Gauss-Jordan

Cramer

- Suponha o seguinte sistema: [3]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{12}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

- Calculamos o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cramer

- Calculamos os determinantes das matrizes que obtemos pela substituição da coluna j pelo vetor b.

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \qquad\qquad\qquad A_2 \qquad\qquad\qquad A_3$$

$$\boxed{x_j = \frac{|A_j|}{|A|}}$$

- $|A_j|$ é o determinante de A_j
- $|A|$ é o determinante de A

Cramer

- “É considerado ineficiente na solução de sistemas de equações lineares, dado o grande número de operações necessárias para a realização desta tarefa.” [1]

Número de Equações	*Número de Operações*
2	11
3	59
5	1.349
10	101.575.099
20	$\sim 1{,}3 \times 10^{20}$

Atualização: Em 2010 saiu um artigo com uma implementação muito mais eficiente da regra de Cramer, em $O(n^3)$, de certa forma a "reabilitando" para resolução prática de sistemas de equações. Segundo os autores, é mais fácil paralelizá-la em arquiteturas comuns do que o método de eliminação de Gauss (e mesmo sem paralelizar eles conseguiram 1/2 da performance da implementação de Gauss no LAPACK). Confira o artigo em http://dx.doi.org/10.1145/1878537.1878623

Eliminação de Gauss

- Consiste em transformar o sistema Ax=b em Tx=c,
  - Onde T é a matriz triangular.

• Um sistema de equações lineares é dito triangular superior se é da forma, com $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \qquad a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \vdots \\ \qquad \qquad \qquad a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

- E a solução é:

$$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad i = (n-1), (n-2), \ldots, 1. \end{cases}$$

Eliminação de Gauss

- Como transformar uma matriz qualquer numa matriz triangular?
  - Trocar duas equações;
  - Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
  - Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Eliminação de Gauss: Exemplo 1

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

- A matriz aumentada é:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 6 & -2 & \vdots & 7 \\ 2 & -4 & 10 & \vdots & 8 \end{pmatrix}$$

Eliminação de Gauss: Exemplo 1

Usando o Algoritmo de Eliminação de Gauss, temos para a 1ª coluna, $m_{11} = -3/5$ para zerar a_{21}, e $m_{12} = -2/5$ para zerar a_{31}
Assim obtemos a matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 24/5 & -13/5 & 11/5 \\ 0 & -24/5 & 48/5 & 24/5 \end{array}\right)$$

- m_{ij} é chamado fator de eliminação

Eliminação de Gauss: Exemplo 1

Em seguida, para a 2ª coluna, $m_{21} = 1$ para zerar a^*_{32}, donde teremos

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 24/5 & -13/5 & \vdots & 11/5 \\ 0 & 0 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

Daí, por substituições sucessivas, temos,

$$x_3 = 7/7 = 1; \quad x_2 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = 1$$

De forma mais geral...

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & \vdots & b^*_2 \\ 0 & a^*_{32} & a^*_{33} & \vdots & b^*_3 \end{pmatrix}$$

$$a^*_{22} = m_{11} \times a_{12} + a_{22}$$
$$a^*_{32} = m_{12} \times a_{12} + a_{32}$$

...

Primeira etapa: Zerar os elementos da primeira coluna abaixo de a_{11}, ($a_{11} \neq 0$).

Passo 1: Adicionar à 2ª linha a 1ª linha multiplicada por $m_{11} = - a_{21} / a_{11}$ (m_{ij} é chamado fator de eliminação);

Passo 2: Adicionar à 3ª linha a 1ª linha multiplicada por $m_{12} = - a_{31} / a_{11}$.

De forma mais geral...

<u>Segunda etapa</u>: Zerar os elementos da segunda coluna abaixo de a^*_{22}, ($a^*_{22} \neq 0$).

<u>Passo 1:</u> Adicionar à 3ª linha a 2ª linha multiplicada por $m_{21} = = - a^*_{32} / a^*_{22}$. Daí

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ 0 & a^*_{22} & a^*_{23} & \vdots & b^*_2 \\ 0 & 0 & a^{**}_{33} & \vdots & b^{**}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = b^{**}_3 / a^{**}_{33} \\ x_2 = \dfrac{b^*_2 - a^*_{23}\, x_3}{a^*_{22}} \\ x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}} \end{cases}$$

O que acontece se o pivô for zero?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

- É impossível trabalhar com um pivô nulo.

E se o pivô for muito próximo de zero?

- “Trabalhar com um pivô muito próximo de zero pode conduzir a resultados totalmente imprecisos. Isto porque em qualquer calculadora ou computador os cálculos são efetuados com aritmética de precisão finita.” [4]

Exemplo 3.3

- Errata: Na questão 3.3 do livro devemos substituir 4 por 3 dígitos significativos.

Exemplo 3.3 - Resolver o sistema de equações lineares dado a seguir usando o método de Eliminação de Gauss sem pivotação e com a pivotação parcial. Supor que a máquina utilizada trabalha na base 10, com 3 dígitos no significando.

$$\begin{cases} 0{,}0001x_1 + 1{,}0000x_2 = 1{,}0000 \\ 1{,}0000x_1 + 1{,}0000x_2 = 2{,}0000 \end{cases}$$

Exemplo 3.3

- Verifique que sem a pivotação o resultado é $x_1=0$, $x_2=1$.
- Com a pivotação parcial o resultado é $x_1=1$, $x_2=1$.
- A solução exata seria $x_1 = 1{,}0001$, $x_2 = 0{,}9999$
- A solução com pivotação parcial é a melhor possível para a máquina em questão.

Exemplo 3.3 - Conclusão

- A pivotação pode ter papel fundamental em casos em que podem ocorrer problemas de arredondamento.
- O não uso da pivotação pode levar a resultados completamente distorcidos.
- Em alguns casos, mesmo com pivotação pode-se chegar a resultados errados

Estratégias de Pivoteamento

- Pivotação: "É o processo usado no método de eliminação de Gauss para trocar, se necessário, as linhas da matriz de modo que o elemento da diagonal principal seja diferente de zero. Estes elementos são chamados pivôs."

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Estratégias de Pivoteamento

- Pivotação Parcial: “Na escolha do k-ésimo pivô, troca-se, se necessário, a k-ésima linha da matriz de modo que o maior elemento, em módulo, entre o restante da k-ésima coluna seja $|a_{kk}| = máx\,|a_{ik}|,\ \ i = k, k+1, \ldots, n;$ Fonte: [1]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Fonte: [4]

Estratégias de Pivoteamento

- Pivotação Total: Na escolha do k-ésimo pivô, troca-se, se necessário, a k-ésima linha e/ou a k-ésima coluna da matriz de modo que o maior elemento, em módulo, entre os restantes seja usado como pivô.

$$|a_{kk}| = máx\,|a_{ij}|,\quad i = k, k+1, \ldots, n \ \text{ e } \ j = k, k+1, \ldots, n\,;$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Algoritmo

Algoritmo de eliminação de Gauss

Para $k = 1,2, \ldots, (n-1)$ faça
  Para $i = (k+1), (k+2), \ldots, n$ faça
    $m = a_{ik} / a_{kk}$ (supondo $a_{kk} \neq 0$)
    $a_{ik} = 0$
    Para $j = (k+1), (k+2), \ldots, n$ faça
      $a_{ij} = a_{ij} - m \times a_{kj}$
    fim
    $b_i = b_i - m \times b_k$
  fim
fim
$x_n = b_n / a_{nn}$
Para $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$ faça
  $x_k = b_k$
fim
Para $k = (n-1), (n-2), \ldots, 1$ faça
  Para $i = (k+1), (k+2), \ldots, n$ faça
    $x_k = x_k - a_{ki} \times x_i$
  fim
  $x_k = x_k / a_{kk}$
fim.

Análise quantitativa do método de Eliminação de Gauss

Número de Equações	*Número de Operações*
2	9
3	28
5	115
10	805
20	5.910

- Comparando com Cramer:

Número de Equações	*Número de Operações*
2	11
3	59
5	1.349
10	101.575.099
20	$\sim 1{,}3 \times 10^{20}$

Método de Eliminação de Gauss-Jordan

- "É uma continuação do método de Gauss"
- "Neste método a matriz dos coeficientes é transformada em triangular inferior e superior."
- Com isso, ficamos apenas com a diagonal e a solução é trivial.
- Basta tornar os elementos $a_{ii}=1$, $i=1, 2, ..., n$.

Gauss-Jordan: Exemplo

- Partindo do exemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & \vdots & 8 \\ 0 & 24/5 & -13/5 & \vdots & 11/5 \\ 0 & 0 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

- Realizando operações iguais à do método de Gauss, podemos facilmente chegar à matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 24/5 & 0 & \vdots & 24/5 \\ 0 & 0 & 7 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Logo, a solução é: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Bibliografia

- **[1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.**
- **[2] http://www.ipb.pt/~balsa/teaching/MN08/Sist_Lin.pdf**
- **[3] Cramer:** http://www.youtube.com/watch?v=euMF_nNw3zY
- **[4] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.**